UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Fasi di ricostruzione in sistemi Hamiltoniani

Relatore
Prof. Francesco Fassò

Laureando
Alessandro Minuzzo

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è di descrivere il processo di ricostruzione per sistemi dinamici con simmetria, esaminando come esempio il caso Hamiltoniano.
Nel primo capitolo si descriverà in modo sintetico ma preciso la struttura di questi sistemi, e come sia possibile ricondurre il problema della loro soluzione allo studio di un sistema ridotto. Si descriverà in seguito il caso specifico dei sistemi Hamiltoniani, mettendo in evidenza come per tali sistemi il processo di riduzione si specializzi conservando le proprietà geometriche del sistema di partenza.
Nel capito successivo si illustrerà il processo inverso che permette, supponendo risolto il sistema ridotto, di ricostruire le soluzioni del sistema di partenza. In questo contesto si definirà la fase di ricostruzione. Si tratterà infine l'esempio del corpo rigido libero, illustrando una formula per la fase dovuta a R. Montgomery.
Si daranno per note nozioni di base di geometria differenziale, della teoria dei gruppi di Lie e dei sistemi Hamiltoniani.

Capitolo 1

Riduzione

1.1 Sistemi con simmetria e riduzione

Si riportano in questa sezione le principali proprietà dei sistemi dinamici dotati di simmetria, dei quali verranno specificate anzitutto le poprietà geometriche (spazio delle orbite) e successivamente quelle dinamiche (sistema ridotto).Il punto di partenza per questa analisi è costituito dalle definizioni seguenti.

Definizione 1. *Una azione (sinistra) di un gruppo di Lie G su una varietà differenziabile M è una mappa differenziabile $\Psi : G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto \Psi(g, m)$ tale che*

$$i) \quad \Psi(e, m) = m \quad \forall m \in M, e = \mathrm{id}_G \ ;$$

$$ii) \quad \Psi(g, \Psi(h, m)) = \Psi(gh, m) \quad \forall g, h \in G \ \ \forall m \in M \ .$$

Si definiscono anche le mappe

$$\Psi_g : M \to M, \quad \Psi_g(m) := \Psi(g, m) \quad \forall g \in G, \ m \in M \ ,$$

$$\Psi^m : G \to M, \quad \Psi^m(g) := \Psi(g, m) \quad \forall m \in M, \ g \in G \ .$$

Definizione 2. *Una azione $\Psi : G \times M \to M$ di un gruppo di Lie G su una varietà differenziabile M è detta* libera *se*

$$g \neq e \ \Rightarrow \Psi(g, m) \neq m \quad \forall m \in M, \ g \in G \ .$$

Nelle stesse notazioni

Definizione 3. *Una azione $\Psi : G \times M \to M$ è detta* propria *se per l'applicazione $\widetilde{\Psi} : G \times M \to M \times M$ definita da $(g, m) \mapsto (\Psi(g, m), m)$, le preimmagini di compatti sono compatte (ovvero $\widetilde{\Psi}$ è propria nel senso topologico).*

Definizione 4. *Un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$ è detto* invariante *rispetto all'azione sinistra $\Psi : G \times M \to M$ se $\Psi_g^*(X) = X$, ovvero*

$$X(\Psi_g(m)) = \mathrm{d}(\Psi_g)_m(X(m)) \quad \forall m \in M, \ \forall g \in G \ , \tag{1.1}$$

Nel seguito si supporrà sempre che $\dim(G) \leq \dim(M)$. La terna (M, X, G), quando sia nota l'azione di G su M e specificata l'invarianza rispetto a questa di X, sarà detta *sistema dinamico con simmetria.* Un sistema dinamico di cui non vengano specificate eventuali simmetrie verrà denotato solo con la coppia (M, X).

1.1.1 Lo spazio delle orbite

Si consideri una azione Ψ di G su M, che sia *libera* e *propria*. Sotto queste ipotesi le orbite di G sono sottovarietà embedded di M, ciascuna delle quali è diffeomorfa a G. Indipendentemente dall'ipotesi di libertà e dal fatto che l'azione sia propria, le orbite di G sono disgiunte e la loro unione è M.
L'appartenenza di un punto di M ad un'orbita del gruppo costituisce una relazione di equivalenza. In questo modo è possibile definire uno spazio quoziente, indicato con M/G, detto *spazio delle orbite*. La proiezione $\pi : M \to M/G$ è resa continua definendo sul codominio la topologia quoziente (la più fine che renda π continua). Vale il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda ad [1].

Teorema 1. *Sia M una varietà differenziabile, G un gruppo di Lie, la cui azione su M sia libera e propria. Allora M/G, equipaggiato con la topologia quoziente ammette un'unica struttura di varietà differenziabile compatibile con tale topologia e per la quale $\pi : M \to M/G$ è una sommersione.*

Lo spazio quoziente ha quindi dimensione pari a $\dim(M) - \dim(G)$ ed eredita inoltre proprietà topologiche da M, come la compattezza e la connessione.

1.1.2 Il sistema ridotto

Un sistema dinamico sulla varietà M è definito da un campo vettoriale $X \in \mathfrak{X}(M)$, con flusso completo $\Phi^X : \mathbb{R} \times M \to M$. Se il campo vettoriale è invariante sotto l'azione di G, si ha che curve integrali di X vengono mappate da ogni Ψ_g in curve integrali di X. La (1.1) è perciò equivalente alla condizione di equivarianza del flusso, espressa da

$$\Phi_t^X \circ \Psi_g = \Psi_g \circ \Phi_t^X \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall g \in G\ . \tag{1.2}$$

Siccome il flusso di X trasporta orbite in orbite, la sua π-proiezione su M/G, trasporta punti in punti e definisce un flusso differenziabile su M/G, completo, e compatibile con la proiezione π nel senso specificato dalla seguente proposizione.

Proposizione 1. *Sia $\Psi : G \times M \to M$ un'azione libera e propria, $X \in \mathfrak{X}(M)$ invariante rispetto a questa. Allora esiste un campo vettoriale $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ π-correlato a X, cioè tale che*

$$\overline{X}(\pi(m)) = \mathrm{d}\pi_m(X(m)) \quad \forall m \in M\ . \tag{1.3}$$

Inoltre, essendo $\Phi^{\overline{X}} : \mathbb{R} \times M/G \to M/G$ il flusso di $\overline{X}$, si ha la seguente condizione di compatibilità

$$\pi \circ \Phi_t^X = \Phi_t^{\overline{X}} \circ \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}\ . \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Il valore del campo $\overline{X}$ non dipende dal punto m dell'orbita. Infatti, preso m' un secondo punto nella stessa orbita ($\pi(m) = \pi(m')$), esiste un $g \in G$ tale che $m' = \Psi_g(m)$ e quindi, dalle proprietà del differenziale, per l'invarianza di X, e perchè $\pi \circ \Psi_g = \Psi_g$ per ogni g,

$$\overline{X}(\pi(m')) = \mathrm{d}\pi_{m'}(X(m')) = \mathrm{d}\pi_{m'}(\mathrm{d}(\Psi_g)_m(X(m))) =$$

$$= \mathrm{d}(\pi \circ \Psi_g)_m(X(m)) = \mathrm{d}\pi_m(X(m)) = \overline{X}(\pi(m))\ .$$

A partire dall'espressione (1.3) si dimostra poi che il campo $\overline{X}$ è liscio ed il suo flusso è compatibile con quello di X mediante la proiezione π secondo la (1.4). Si veda ad esempio [1].

□

In conclusione, la varietà M/G ed il campo vettoriale $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ costituiscono un sistema dinamico differenziabile, detto *sistema ridotto*, mentre l'intero processo che da (M, X, G) porta a $(M/G, \overline{X})$ è detto *riduzione*. Lo spazio delle orbite o "spazio ridotto" M/G sarà indicato nel seguito con $\overline{M}$ e i suoi punti con $\overline{m}$.

1.2 Sistemi Hamiltoniani con simmetria

Nel caso particolare dei sistemi Hamiltoniani, definiti come le terne (M, ω, H) dove (M, ω) è una varietà simplettica e $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ è detta Hamiltoniana o fuzione di Hamilton, la riduzione ha delle proprietà speciali, dovute al fatto che per questi sistemi, opportune simmetrie comportino l'esistenza di quantità conservate.

1.2.1 Mappe momento

Sia (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano e G un gruppo di Lie che agisce su M per simplettomorfismi, cioè l'azione $\Psi : G \times M \to M$ è tale che

$$(\Psi_g)^*\omega = \omega \quad \forall g \in G \ .$$

Una azione che goda di questa proprietà è detta *simplettica*.
I generatori infinitesimi di Ψ, definiti come

$$\xi_M(m) := \mathrm{d}(\Psi^m)_e(\xi) \in T_m M \quad \forall m \in M,\ \xi \in \mathfrak{g} \ ,$$

sono tali che la moltiplicazione interna di ciascuno di loro con la forma simplettica $\mathrm{i}_{\xi_M}\omega$ è una 1-forma chiusa. Nel caso in cui essi siano Hamiltoniani, ovvero $\mathrm{i}_{\xi_M}\omega$ è esatta per ogni ξ, l'azione è detta *Hamiltoniana*.

Proposizione 2. *Sia (M, ω) una varietà simplettica, G un gruppo di Lie, la cui azione sia Hamiltoniana. Allora esiste una mappa lineare*

$$\mathcal{J} : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad \xi \mapsto \mathcal{J}(\xi) =: J_\xi \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad t.c. \quad \mathrm{i}_{\xi_M}\omega = \mathrm{d}J_\xi \ ,$$

cioè per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$, J_ξ è una Hamiltoniana per il generatore infinitesimo dell'azione ξ_M.

Dimostrazione. L'associazione $\xi \mapsto \xi_M$ è lineare per definizione. Si considerino dei vettori di base per $\mathfrak{g}$, e si ponga il valore di $\mathcal{J}$ su ciascuno di questi pari ad una fissata Hamiltoniana per il generatore infinitesimo corrispondente. Su qualsiasi altro vettore dell'agebra, che si scrive come combinazione lineare di tali elementi di base, $\mathcal{J}$ è definita come la combinazione lineare, coi medesimi coefficienti, delle Hamiltoniane scelte dei generatori relativi agli elementi di base nell'algebra.

□

Nelle ipotesi della proposizione 2 si consideri la seguente definizione.

Definizione 5. *La mappa $J : M \to \mathfrak{g}^*$, $m \mapsto J(m)$ tale che*

$$J(m)(\xi) = J_\xi(m) \quad \forall \xi \in \mathfrak{g},\ \forall m \in M \ ,$$

prende il nome di mappa momento *o momento dell'azione di G su M.*

Osservazione 1. *La mappa momento non è unica. Le Hamiltoniane dei generatori infinitesimi sono infatti definite a meno di Hamiltoniane costanti.*

Se l'Hamiltoniana del sistema è invariante sotto l'azione Hamiltoniana (che è condizione più forte dell'invarianza del campo Hamiltoniano X_H ad essa associato), vale la seguente proposizione.

Proposizione 3. *Sia (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano e G un gruppo di Lie la cui azione su M sia Hamiltoniana. Se la funzione di Hamilton H è invariante sotto l'azione di G, allora la mappa momento è conservata dal flusso del campo Hamiltoniano del sistema, ovvero*

$$J \circ \Phi_t^{X_H} = J \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Dimostrazione. Il valore della mappa momento è una forma lineare su uno spazio vettoriale ($\mathfrak{g}$), che è univocamente definita dal suo valore su un insieme di generatori di $\mathfrak{g}$. In base a questo fatto, indicando con Φ^H il flusso del campo Hamiltoniano X_H, è sufficiente mostrare che per ogni $\xi \in \mathfrak{g}$, e per tutti i tempi $t \in \mathbb{R}$ si ha $J_\xi = J_\xi \circ \Phi_t^H$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè avvenga ciò è che si annulli la derivata di Lie.

$$\frac{d}{dt}\left(J_\xi \circ \Phi_t^H\right) = (\mathcal{L}_{X_H} J_\xi) \circ \Phi_t^H = X_H(J_\xi) \circ \Phi_t^H = \mathrm{d}J_\xi(X_H) \circ \Phi_t^H =$$

$$= \omega(\xi_M, X_H) \circ \Phi_t^H = -\omega(X_H, \xi_M) \circ \Phi_t^H = -\left(\mathcal{L}_{\xi_M} H\right) \circ \Phi_t^H = 0 \ ,$$

poichè H è invariante sotto l'azione del gruppo. Difatti, la condizione di invarianza $H = H \circ \Psi_g$ per qualsisasi $g \in G$, implica che per $g = \exp(t\xi)$ si abbia

$$0 = \frac{d}{dt} H \circ \Psi_{\exp(t\xi)}|_{t=0} = \mathcal{L}_{\xi_M} H$$

□

La proposizione 3 indica come la presenza di una simmetria Hamiltoniana, si traduca nell'esistenza di un integrale primo "vettoriale", che prende valori nell'algebra di Lie di G, e si può perciò interpretare come una generalizzazione del teorema di Noether classico. Gli insiemi di livello regolari di J sono sottovarietà embedded di M di dimensione $\dim(M) - \dim(G)$.

1.2.2 Riduzione nel caso simplettico

In generale un'azione Hamiltoniana Ψ non lascerà invarianti i sottoinsiemi di livello della mappa momento. Per ridurre il sistema, ristretto ad una di queste sottovarietà, è dunque necessario far agire solo un particolare sottoinsieme di G.
Si considerino su $\mathcal{C}^\infty(M)$ le parentesi di Poisson indotte da ω, indicate con $\{\cdot, \cdot\}$, e su $\mathfrak{g}$ il commutatore di Lie $[\cdot, \cdot]$. Le coppie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ e $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ sono delle algebre di Lie.

Definizione 6. *Una azione Hamiltoniana Ψ, del gruppo di Lie G sulla varietà simplettica (M, ω), è detta fortemente Hamiltoniana o Poissoniana se la mappa $\mathcal{J}$ della proposizione 2 è un omomorfismo di algebre, ovvero se*

$$\mathcal{J}([\xi, \eta]) =: J_{[\xi,\eta]} = \{J_\xi, J_\eta\} \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g} \ .$$

Osservazione 2. *Per azioni Hamiltoniane la funzione di Hamilton associata al commutatore $[\xi, \eta]$ non verrà mappata nella parentesi di Poisson delle funzioni di Hamilton dei generatori infinitesimi corrispondenti, ma bensì in $\{\mathcal{J}(\xi), \mathcal{J}(\eta)\} + C(\xi, \eta)$, con la funzione $C(\xi, \eta)$ costante.*

Nel caso in cui la varietà sia un fibrato cotangente, $M = T^*Q$, con Q lo spazio delle configurazioni, è interessante notare come le azioni su Q, sollevate al fibrato cotangente sono Poissoniane.

La proposizione seguente indica come le azioni Poissoniane si comportino sotto l'azione del gruppo G, e la sua dimostrazione si può ritrovare in [2] o in [3].

Proposizione 4. *Sia (M, ω) una varietà simplettica. G un gruppo di Lie la cui azione Ψ su M sia Poissoniana. Allora la mappa momento $J : M \to \mathfrak{g}^*$ è equivariante rispetto all'azione Ψ su M e all'azione coaggiunta $\mathrm{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ su $\mathfrak{g}^*$, cioè per ogni $g \in G$ risulta*

$$J \circ \Psi_g = \mathrm{Ad}^*_g \circ J$$

Risulta ora chiaro il motivo per cui l'azione di tutto G non lasci invariato un sottoinsieme di livello del momento. Affinchè accada questo è necessario e sufficiente restringersi all'opportuno sottoinsieme di G la cui azione coaggiunta Ad^* lasci quel valore del momento inalterato. Tale sottoinsieme è detto *sottogruppo di isotropia dell'azione coaggiunta* relativo al dato valore del momento.

Il sistema ridotto e la ricostruzione

Fissato il valore del momento pari a $\mu \in \mathfrak{g}^*$, il sottogruppo di isotropia G_μ relativo a μ agisce su $J^{-1}(\mu)$, lasciandolo invariato. Se tale gruppo è chiuso (cosa che accade se G è compatto) allora è un gruppo di Lie e sarà quindi possibile quozientare $J^{-1}(\mu)$ ottenendo un sistema ridotto su una varietà di dimensione $\dim(M) - \dim(G) - \dim(G_\mu)$.
Il sistema ridotto sarà qundi definito sulla varietà $J^{-1}(\mu)/G_\mu$ con un derminato campo vettoriale correlato mediante la proiezione $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \to J^{-1}(\mu)/G_\mu$ al campo Hamiltoniano del sistema iniziale. Accadono due fatti sorprendenti: la varietà quoziente è simplettica ed il sistema ridotto è Hamiltoniano. Questo è il contenuto del teorema di riduzione simplettica di Meyer, Marsden e Weinstein.

Teorema 2. [Meyer – Marsden – Weinstein] *Sia (M, ω, H) un sistema Hamiltoniano e $\Psi : G \times M \to M$ una azione Poissoniana di un gruppo di Lie G su M che lascia H invariante, e sia J una sua mappa momento equivariante. Sia μ un valore regolare di J. Si assuma che il sottogruppo di isotropia G_μ agisca liberamente e propriamente sull'insieme di livello corrispondente $J^{-1}(\mu)$, cosicchè la proiezione $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \to J^{-1}(\mu)/G_\mu$ è una sommersione, e $M_\mu := J^{-1}(\mu)/G_\mu$ è una varietà. Allora*

1. *Esiste una 2-forma simplettica ω_μ su M_μ tale che $\pi^*_\mu \omega_\mu = \omega_{|J^{-1}(\mu)}$;*

2. *Esiste un'unica funzione $H_\mu : M_\mu \to \mathbb{R}$ tale che $H_\mu \circ \pi_\mu = H|_{J^{-1}(\mu)}$;*

3. *Il campo Hamiltoniano di H_μ ottenuto con ω_μ è π_μ-correlato a quello di H, ristretto a $J^{-1}(\mu)$.*

Il sistema ridotto $(M_\mu, \omega_\mu, H_\mu)$ è quindi ancora Hamiltoniano.

Per la dimostrazione si rimanda ancora a [2] o [3].

Capitolo 2

Ricostruzione

A seguito del processo di riduzione è possibile che il sistema ridotto ottenuto sia più semplice da trattare. Inoltre, nel caso in cui se ne conosca una soluzione, è legittimo domandarsi come da questa sia possibile ricavare la soluzione del sistema di partenza. La procedura che permette di risalire alla dinamica del sistema iniziale è detta *ricostruzione*. Si tratterà il caso in cui la proiezione $\pi : M \to \overline{M}$ costituisce un fibrato principale banale con spazio totale M, base $\overline{M}$ e fibra caratteristica G, mostrando come il problema iniziale si fattorizzi nell'equazione per il sistema ridotto e l'*equazione di ricostruzione*. In seguito si illustrerà il caso interessante in cui G è compatto e la dinamica ridotta sia periodica, seguendo la trattazione fatta in [4], in cui è richiamato un importante risultato di M. Field, per cui la dinamica ricostruita è quasi periodica. In questo contesto emergerà la fase di ricostruzione.
Infine si esporrà un metodo per il calcolo della fase, e si illustrerà l'esempio del corpo rigido libero.

2.1 L'equazione di ricostruzione nel caso fattorizzabile

Nelle medesime ipotesi del processo di riduzione, in particolare quella secondo cui l'azione Ψ di G su M sia libera e propria, la proiezione $\pi : M \to \overline{M}$ costituisce un fibrato principale. Supponendo che esso sia banale, ovvero diffeomorfo al prodotto cartesiano $\overline{M} \times G$. La proiezione π diventa allora la proiezione sul primo fattore: $\pi_1(\overline{m}, g) = \overline{m}$. L'azione del gruppo G, a seguito di tale identificazione, è data da

$$\Psi_g(\overline{m}, h) = (\overline{m}, gh) \quad \forall (\overline{m}, h) \in \overline{M} \times G,\ \forall g \in G \ . \tag{2.1}$$

Nel fibrato tangente allo spazio totale, TM, la proiezione π_1 definisce un sottofibrato verticale, dato dal nucleo del suo differenziale. Un campo invariante sotto l'azione di G, ammettendo un leggero abuso di notazione, è necessariamente della forma $X(\overline{m}, g) = \overline{X}(\overline{m}) + \xi_G(\overline{m}, g)$, in cui il primo addendo è mappato identicamente da $\mathrm{d}\pi_1$ nel campo ridotto, mentre il secondo è per ogni $\overline{m}$ una sezione sinistro-invariante del sottofibrato verticale. Per questo motivo esiste una mappa $\xi : \overline{M} \to \mathfrak{g}$, tale che $\xi_G(\overline{m}, g) = \mathrm{d}(L_g)_e \xi(\overline{m})$. Il sistema iniziale risulta dunque fattorizzato nel sistema

$$\begin{cases} \dot{\overline{m}} = \overline{X}(\overline{m}) \\ \dot{g} = \mathrm{d}(L_g)_e \xi(\overline{m}) \ . \end{cases} \tag{2.2}$$

Delle equazioni (2.2), la prima è quella del sistema ridotto, mentre la seconda è detta *equazione di ricostruzione*. Nota una soluzione $\overline{m}(t)$ della prima equazione con dato iniziale $\overline{m}_0$, la soluzione del sistema completo, con dato iniziale $(\overline{m}_0, g_0)$ è determinata risolvendo il problema di Cauchy $\dot{g}(t) = \mathrm{d}(L_{g(t)})_e \xi(\overline{m}(t))$ con dato iniziale $g(0) = g_0$.

2.2 Ricostruzione per G compatto di dinamiche ridotte periodiche

2.2.1 La fase di ricostruzione

Si supponga che il campo ridotto $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ abbia un flusso periodico, e che i periodi (minimali) delle orbite ridotte dipendano in modo regolare dai punti $\overline{m}$ in cui passano. Risulta così definita una funzione liscia $\overline{\tau} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ che ad ogni punto dello spazio ridotto associa il periodo minimale dell'unica orbita periodica che passa per esso. Si definisce anche una funzione $\tau : M \to \mathbb{R}$ compatibile con la proiezione $\pi : M \to \overline{M}$, cioè tale che $\tau = \overline{\tau} \circ \pi$. La periodicità delle soluzioni del sistema ridotto implica che un'orbita non ridotta passante per $m \in M$, dopo un tempo pari a $\tau(m)$ si ritrovi nella stessa G-orbita di m. Poichè l'azione è libera sarà univocamente definito un elemento $\gamma(m) \in G$ tale che

$$\Phi^X_{\tau(m)}(m) = \Psi_{\gamma(m)}(m) \ . \tag{2.3}$$

Si definisce così una funzione $\gamma : M \to G$, che ad ogni punto m dello spazio totale associa l'elemento del gruppo $\gamma(m)$ che soddisfa alla (2.3). Tale funzione è detta *funzione di fase*, ed il suo valore su un punto di M è detto *fase di ricostruzione*. Le proprietà della funzione di fase sono riassunte dalla seguente proposizione.

Proposizione 5. *Sia (M, X, G) un sistema dinamico con simmetria, con G gruppo di Lie compatto, che agisce liberamente su M. Se la dinamica ridotta è periodica, la mappa di fase è liscia e valgono le seguenti*

$$i)\ \gamma \circ \Phi^X_t = \gamma \quad \forall t \in \mathbb{R} \ ;$$

$$ii)\ \gamma \circ \Psi_g = C_g \circ \gamma \quad \forall g \in G \ .$$

dove C_g indica il coniugio in G, dato da $C_g(h) = ghg^{-1}$, $h \in G$.

La dinamica ricostruita, risulta legata alla presenza di sottogruppi abeliani, chiusi (cioè compatti, poichè G è compatto) e connessi di G. Tali sottogruppi sono detti tori e sono diffeomorfi al toro standard.

2.2.2 La dinamica del sistema ricostruito

Sia $Z(h)$ il centralizzatore di $h \in G$, ovvero il sottogruppo di G definito come

$$Z(h) := \{g \in G \mid C_g(h) = h\} \ .$$

Si dimostra che per un insieme aperto e denso di punti $g \in G$, detti punti regolari, $Z(h)$ è diffeomorfo ad un toro di dimensione massimale k.
Estendendo tale nomenclatura per i punti di M che abbiano come fase un elemento regolare, è possibile considerare il sottoinsieme $M_T \subset M$ di questi punti, che è un aperto, poichè la funzione di fase è continua. La (sotto-)orbita passante per un punto $m \in M_T$, descritta dall'azione di $Z(\gamma(m))$, indicata con $\Psi_{Z(\gamma(m))}(m)$, è diffeomorfa a un toro di dimensione k. Ristretta a questa sottovarietà la funzione di fase è costante, ed il flusso del campo X, al tempo $\tau(m)$, è un diffeomorfismo di tale sottoinsieme in se stesso. Si

può dimostrare che trasportando questi tori k-dimensionali con il flusso di X, è possibile definire una foliazione di M_T in tori invarianti, di dimensione $k+1$ e la dinamica su questi è coniugata ad una dinamica quasi-periodica su $\mathbb{T}^{k+1}$. Vale infatti la seguente, in cui $\mathfrak{T}_m$ indica il sottoinsieme di M, che si ottiene trasportando $\Psi_{Z(\gamma(m))}(m)$ lungo il flusso di X.

Proposizione 6. *Sia $m \in M_T$ e $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ una base dell'algebra di Lie del toro $Z(\gamma(m))$, con $k = \dim(Z(\gamma(m)))$, tale che dati coefficienti $a^i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \cdots, k$, si abbia $\exp(a^i\xi_i) = e \in Z(\gamma(m))$. Il flusso di X ristretto al toro $\mathfrak{T}_m$ è coniugato al flusso lineare su $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^k = \mathbb{T}^{k+1}$ dato da*

$$\phi_t(\alpha, \beta^1, \cdots, \beta^k) = \left(\alpha + \frac{t}{\tau(m)}, \beta^1 + \frac{t\eta^1}{\tau(m)}, \cdots, \beta^k + \frac{t\eta^k}{\tau(m)}\right) ,$$

dove gli η^i sono definiti dalla condizione $\exp(\eta^i\xi_i) = \gamma(m)$.

La dinamica ricostruita in M_T è quindi quasi-periodica e la conoscenza della fase permette di calcolare le frequenze dei moti quasi-periodici.

2.3 Calcolo della fase

Un possibile approccio per il calcolo della fase di ricostruzione per orbite ridotte periodiche consiste nella sua separazione in due contributi. Il processo di ricostruzione viene applicato alla singola orbita periodica ridotta servendosi del ragionamento seguente, per il quale si sono seguiti [5] e [6].

Ricostruzione per singola orbita

Si consideri il sistema dinamico con simmetria (M, X, G) ridotto mediante l'azione libera e propria di un gruppo di Lie G al sistema $(\overline{M}, \overline{X})$ avendo $\pi : M \to \overline{M}$ come proiezione. Si vuole trovare la soluzione del sistema in M, indicata con $m(t)$, con dato iniziale $m(0) = m_0$, che si proietta nella soluzione del sistema ridotto $\overline{m}(t)$, passante per $\pi(m_0)$, supposta nota.

Sia $n(t)$ una qualunque curva in M con lo stesso dato iniziale ($n(0) = m_0$), che si proietti su $\overline{m}(t)$. Siccome l'azione è libera, per ogni t esiste un unico $h(t)$ in G per cui risulta

$$m(t) = \Psi_{h(t)}(n(t)) . \tag{2.4}$$

Derivando la (2.4) rispetto a t si ha

$$\dot{m}(t) = \mathrm{d}(\Psi_{h(t)})_{n(t)}(\dot{n}(t)) + \mathrm{d}(\Psi^{n(t)})_{h(t)}(\dot{h}(t)) ,$$

dove il secondo termine si scrive, utilizzando l'inversa della trivializzazione sinistra di TG, $G \times \mathfrak{g} \to TG$, $(h, \eta) \mapsto (h, \mathrm{d}(L_h)_e\eta)$, come $\mathrm{d}(\Psi^{n(t)})_{h(t)}\left(\mathrm{d}(L_{h(t)})_e\xi(t)\right)$, in cui

$$\xi(t) = \mathrm{d}(L_{h(t)^{-1}})_{h(t)}(\dot{h}(t)) \in \mathfrak{g} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Dalle proprietà del differenziale e dell'azione sinistra, nell'ordine

$$\mathrm{d}(\Psi^{n(t)})_{h(t)}\left(\mathrm{d}(L_{h(t)})_e\xi(t)\right) = \mathrm{d}(\Psi^{n(t)} \circ L_{h(t)})_e\xi(t) ;$$

$$\Psi^{n(t)} \circ L_{h(t)}(p) = \Psi^{n(t)}(h(t)p) = \Psi(h(t)p, n(t)) = \Psi_{h(t)} \circ \Psi^{n(t)}(p) \quad \forall p \in G ,$$

si conclude che

$$\dot{m}(t) = \mathrm{d}(\Psi_{h(t)})_{n(t)}\left(\dot{n}(t) + \mathrm{d}(\Psi^{n(t)})_e(\xi(t))\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} . \tag{2.5}$$

Nelle ipotesi fatte, il campo vettoriale X è invariante sotto l'azione di G, nel senso che $\Psi^*_{h(t)}X(m) = X(m)$ per ogni m in M. Di conseguenza

$$\dot{m}(t) = X(m(t)) = X\left(\Psi_{h(t)}(n(t))\right) = \mathrm{d}(\Psi_{h(t)})_{n(t)}\left(X(n(t))\right) \ .$$

In questo modo, a partire dalla (2.5) si ottiene, eliminando il differenziale dell'azione, l'equazione seguente

$$\mathrm{d}(\Psi^{n(t)})_e(\xi(t)) = X(n(t)) - \dot{n}(t) \ . \tag{2.6}$$

L'equazione ottenuta non è un'equazione differenziale in $\xi(t)$, da questa, noto $\xi(t)$, il problema della ricostruzione dell'orbita non ridotta $m(t)$ è equivalente al problema di Cauchy:

$$\dot{h}(t) = \mathrm{d}(L_{h(t)})_e\xi(t) \qquad h(0) = e \ . \tag{2.7}$$

Fase dinamica e fase geometrica

Il risultato della procedura di ricostruzione non dipende evidentemente dalla scelta della curva $n(t)$. Risulta naturale domandarsi se vi sia una scelta più conveniente delle altre. La risposta a tale domanda è suggerita dall'equazione (2.6), ma prevede una nuova scelta arbitraria, che consiste nell'equipaggiare il fibrato principale costituito da $\pi : M \to \overline{M}$ con una connessione.

Definizione 7. *Sia $\pi : M \mapsto \overline{M}$ un fibrato principale di fibra caratteristica il gruppo di Lie G. Una* connessione principale *A è una 1-forma su M a valori in $\mathfrak{g}$ tale che*

$$i) \ \ A(m)\left(\mathrm{d}(\Psi^m)_e\xi\right) = \xi \quad \forall\xi \in \mathfrak{g} \ , \forall m \in M \ ; \tag{2.8}$$

$$ii) \ \ A(m)(\mathrm{d}(\Psi_g)_m(Y)) = \mathrm{Ad}_g(A(m)(Y)) \quad \forall Y \in T_mM, \ \forall g \in G \ , \forall m \in M. \tag{2.9}$$

Una connessione principale definisce una distribuzione "orizzontale" data da $\ker(A)$, ed un "sollevamento parallelo" di vettori, che permette, data una curva $\overline{m}(t)$ nella varietà di base $\overline{M}$, di trovare l'unica curva $n(t)$ passante per $n(0) = m_0$ con $\dot{n}(t) \in \ker\left(A(n(t))\right)$. In questo caso l'equazione (2.6) è equivalente alla

$$\xi(t) = A(X(n(t))) \ . \tag{2.10}$$

Scegliendo una connessione principale, si può quindi fissare la curva $n(t)$, unica curva che sia il sollevamento orizzontale della soluzione del sistema ridotto. Ricordando che $g(0) = e$, per la scelta del dato iniziale, si propone la seguente definizione, in cui $T = \tau(m_0)$ indica il periodo della soluzione del sistema ridotto.

Definizione 8. *Nelle notazioni precedenti, sia $h \in G$ l'unico elemento tale che $n(T) = \Psi_h(n(0))$ e $m(T) = \Psi_{\gamma(m_0)}(m(0))$. La fase di ricostruzione $\gamma(m_0)$ si compone di due contributi*

$$\gamma(m_0) = g(T)h \tag{2.11}$$

in cui h è detto fase geometrica*, mentre $g(T)$ è detto* fase dinamica*.*

Si noti che tale separazione è dipendente dalla connessione scelta.

Formula per la fase geometrica nel caso $G = \mathbb{S}^1$

Seguendo [6], sia $\Psi : \mathbb{S}^1 \times M \to M$ libera e propria. La proiezione $\pi : M \to (M/\mathbb{S}^1) = \overline{M}$ costituisce un fibrato principale di fibra caratteristica $\mathbb{S}^1$. Sia inoltre A una connessione principale su M. Nell'identificazione di $\mathfrak{s}^1$ con $\mathbb{R}$, in cui il più piccolo elemento $\zeta \in \mathfrak{s}^1$ che si esponenzia all'identità, è mandato in 1, A risulta di fatto una 1-forma differenziale, indicata con θ. Per definizione, indicato con ζ_M il generatore infinitesimo associato a ζ, per la (2.8) si ha $A(\zeta_M) = \theta(\zeta_M) = 1$.
Vale la seguente, di cui si omette la dimostrazione.

Proposizione 7. *Esiste una 2-forma differenziale Ω su $\overline{M}$ tale che $\pi^*\Omega = \mathrm{d}\theta$. Tale forma è detta* forma di curvatura *di θ.*

Sia (U, ϕ) una carta locale di $\overline{M}$ che trivializzi il fibrato, cioè tale che esista un diffeomorfismo $\chi : \pi^{-1}(U) \to \phi(U) \times \mathbb{S}^1$. Scelto $\overline{m} \in U$ si consideri una famiglia liscia di curve chiuse

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to \pi^{-1}(U) \quad t.c. \quad (s,t) \mapsto \gamma(s,t) =: \gamma_s(t) \ ,$$
$$\gamma_s(0) = \overline{m} \in M \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \ .$$

Per ogni s e $m \in \pi^{-1}(U)$ sia $\Gamma_s^m : [0,1] \to \pi^{-1}(U)$ il sollevamento orizzontale di $\gamma_s(t)$ passante per m, cioè la curva tale che

$$\pi(\Gamma_s^m(t)) = \gamma_s(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial t}(t) \in \ker(\theta) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \ \forall t \in [0,1] \ .$$

Si definisce l'*olonomia* di θ lungo γ_s, misurata dal punto m, come l'elemento $\mathrm{hol}_{\mathrm{m}}^{\gamma_s} \in \mathbb{S}^1$ tale che $\Psi_{\mathrm{hol}_{\mathrm{m}}^{\gamma_s}}(m) = \Gamma_s^m(1)$. Per la definizione 8 quindi, l'olonomia è pari alla fase geometrica per la curva γ_s.

Proposizione 8. *Risulta*

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{hol}_{\mathrm{m}}^{\gamma_s}(s) = \int_0^1 \Omega(\gamma_s(t)) \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}(t), \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(t) \right) \mathrm{d}t \tag{2.12}$$

Dimostrazione. Siccome le curve $\Gamma_s^m(t)$ sono orizzontali, in ogni punto $\Gamma_s^m(t) \in M$, valutando le derivate di Γ_s^m in t, risulta

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{ds}\left(\theta\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial t}\right)\right) &= \frac{\partial \theta}{\partial m}\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial t}\right) + \theta\left(\frac{\partial^2 \Gamma_s^m}{\partial s \partial t}\right) = \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial m}\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial t}\right) - \frac{\partial \theta}{\partial m}\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}\right) + \frac{d}{dt}\left(\theta\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}\right)\right) = \\ &= -\mathrm{d}\theta\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}\right) + \frac{d}{dt}\left(\theta\left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}\right)\right) \ . \end{aligned}$$

Sapendo che $\pi^*\Omega = \mathrm{d}\theta$, calcolando Ω in $\gamma_s(t)$ si ha

$$\Omega(\gamma_s(t)) \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial s} \right) = \frac{d}{dt}\left(\theta(\Gamma_s^m(t)) \left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s} \right) \right) \ .$$

Integrando quest'ultima espressione in $[0,1]$, e osservando che per definizione risulta che $\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}(0) = 0$ per ogni s, si conclude che

$$\theta(\Gamma_s^m(1)) \left(\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}(1) \right) = \int_0^1 \Omega(\gamma_s(t)) \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}(t), \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(t) \right) \mathrm{d}t \ .$$

Si può dimostrare che $\frac{\partial \Gamma_s^m}{\partial s}(1) = \zeta_M(\Gamma_s^m(1)) \frac{\partial}{\partial s} \mathrm{hol}_m^{\gamma_s}$, e poichè $\frac{\partial}{\partial s} \mathrm{hol}_m^{\gamma_s}(s)$ è un numero, avendo $\theta(\zeta_M) = 1$, la precedente è equivalente alla (2.12).

□

Supponendo l'aperto U semplicemente connesso e considerando la sottofamiglia di curve $\gamma|_{[0,\delta]\subset(-\varepsilon,\varepsilon)}$, quando queste, al variare di s, descrivono una superficie S di bordo la curva $\gamma_\delta([0,1])$, a partire dalla (2.12) si ottiene che

$$\begin{aligned}\mathrm{hol}_m^{\gamma_\delta} &= \int_0^\delta \int_0^1 \Omega(\gamma_s(t)) \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}(t), \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(t) \right) \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s = \\ &= \int_{[0,\delta]\times[0,1]} \Omega(\gamma_s(t)) \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}(t), \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(t) \right) \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s = \\ &= \int_{[0,\delta]\times[0,1]} \gamma^*\Omega = \int_S \Omega \ .\end{aligned}$$

Se in particolare la restrizione della 2-forma Ω in U è una forma volume per S, la (2.12) permette di legare l'olonomia, e quindi la fase geometrica, all'area orientata di tale superficie. Riassumendo

$$\mathrm{hol}_m^{\gamma_\delta} = \int_S \Omega \qquad \partial S = \gamma_\delta. \tag{2.13}$$

2.4 Il corpo rigido libero

In questa sezione si ricaverà la fase di ricostruzione per il corpo rigido, in assenza di forze esterne (corpo rigido libero), relativa ad un moto periodico del sistema ridotto, illustrando una formula ottenuta da R. Montgomery [7]. Si prepone un'analisi delle proprietà del corpo rigido libero come sistema Hamiltoniano meccanico.

2.4.1 Il sistema ridotto

Lo spazio delle fasi di un corpo rigido avente un punto fisso è $T^*SO_3(\mathbb{R})$, che ha la struttura di fibrato vettoriale banale, essendo diffeomorfo a $SO_3(\mathbb{R})\times\mathfrak{so}_3^*(\mathbb{R})$ mediante le traslazioni a sinistra. Osservando che $\mathfrak{so}_3^*(\mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$ si conclude che lo spazio delle fasi del corpo rigido è identificabile con $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \ni (g, K)$. I punti di $SO_3(\mathbb{R})$ rappresentano la configurazione rispetto ad un riferimento fissato nello spazio, mentre i punti di $\mathbb{R}^3$ i valori del momento angolare del corpo scritti nel riferimento solidale al corpo rigido. La funzione di Hamilton del corpo rigido è data da

$$H(g, K) = \frac{1}{2} K \cdot \mathcal{I}^{-1} K \ ,$$

dove $\mathcal{I}$ è il tensore d'inerzia. La forma simplettica di $T^*SO_3(\mathbb{R})$, è il differenziale esterno della 1-forma di Liouville di $T^*SO_3(\mathbb{R})$. L'espressione di quest'ultima nella identificazione scelta di $T^*SO_3(\mathbb{R})$ con $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ è nota essere

$$\lambda_{(g,K)}(\rho, \eta) = K\left(\mathrm{d}(L_{g^{-1}})_g(\rho)\right) \quad \forall (g, K) \in SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3,\ \forall (\rho, \eta) \in T_{(g,K)}(SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3) \ .$$

Si consideri il sollevamento cotangente dell'azione di $SO_3(\mathbb{R})$ su se stesso. Questa azione è Poissoniana e nella rappresentazione scelta è data da

$$\Psi : SO_3(\mathbb{R}) \times (SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3) \to SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \ ,$$

$$(g, (h, K)) \mapsto (gh, K) \quad g, h \in G,\ K \in \mathbb{R}^3 \ .$$

È immediato notare che essa lascia H invariante.
La mappa momento di tale azione è

$$J : SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (g, K) \mapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} K \quad \forall (g, K) \in SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \ ,$$

che per ogni punto (g, K), fornisce il momento angolare scritto rispetto al riferimento spaziale (fisso). La conservazione di quest'ultimo, per la proposizione 3, rispecchia la ben nota conservazione del momento angolare del corpo rigido libero.
Fissato il valore della mappa momento pari a $\mu \in \mathbb{R}^3$, il sottoinsieme di livello è diffeomorfo a $SO_3(\mathbb{R})$. Il sottogruppo di isotropia dell'azione coaggiunta è dato dalle rotazioni di asse μ, che formano un gruppo isomorfo ad $\mathbb{S}^1$. Quozientando $J^{-1}(\mu)$ rispetto a questo, si ottiene lo spazio delle orbite $SO_3(\mathbb{R})/\mathbb{S}^1$ che è diffeomorfo alla sfera di raggio $\|\mu\|$, indicata con $\mathbb{S}^2_\mu := \{K \in \mathbb{R}^3 : \|K\| = \|\mu\|\}$. Per il teorema 2 il sistema ridotto è Hamiltoniano, e si dimostra che le equazioni di Hamilton che si ottengono sono coniugate a quelle di Eulero ($\dot{K} = K \times (\mathcal{I}^{-1}K)$, con $\times$ prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$), ristrette a $\mathbb{S}^2_\mu$. Su tale sfera il moto è vincolato dalle intersezioni con le superfici di livello dell'energia, che in generale sono ellissoidi triassiali. Escludendo gli equilibri, corrispondenti alle rotazioni stazionarie attorno agli assi principali d'inerzia, e quattro separatrici, i moti sono periodici.

2.4.2 La fase di ricostruzione e la formula di Montgomery

Il fibrato $SO_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{S}^2_\mu$ ha fibra caratteristica $\mathbb{S}^1$, e non è banale. Tuttavia, escludendo le separatrici, si ottiene che lo spazio ridotto $\mathbb{S}^2_\mu$ è decomposto in quattro regioni semplicemente connesse dove il fibrato si trivializza.
Sia $K(t)$ una soluzione periodica del sistema ridotto contenuta in una di queste regioni, con dato iniziale $K(0) = \mu$, di periodo T. Sia poi $g(t)$ la soluzione dell'equazione di ricostruzione con dato iniziale $g(0) = e$. Facendo uso della notazione matriciale, si ha che $g(T)K(T) = \mu$ ovvero, per la periodicità

$$g(T)\mu = \mu \ .$$

$g(T)$ è quindi una rotazione di asse μ.

Sia Δ l'angolo di questa rotazione. Identificando $\mathfrak{s}^1$ con $\mathbb{R}$, come nella sezione precedente, e $g(T) \in G_\mu$ con l'angolo di rotazione $\Delta \in \mathbb{S}^1$, si osserva che tale angolo rappresenta la fase di ricostruzione per il moto periodico $K(t)$ su $\mathbb{S}^2_\mu$.

Seguendo la costruzione della sezione 2.3, sia θ la 1-forma di Liouville λ ristretta a $J^{-1}(\mu)$. Una scelta conveniente della connessione è data dalla seguente

$$A(g, K) = \frac{1}{\|\mu\|}\theta \ .$$

Indicando con ω_μ la forma simplettica ridotta e con ω quella ristretta all'insieme di livello del momento, sempre per il teorema 2, $\pi^*\omega_\mu = \omega = \mathrm{d}\theta$. La forma di curvatura Ω sullo spazio ridotto, per la proposizione 8, è data dalla forma simplettica ridotta, che è pari alla forma volume sulla sfera $\mathrm{d}S$, presa col segno opposto. Aggiungedo il fattore $\frac{1}{\|\mu\|}$, si ha quindi

$$-\frac{1}{\|\mu\|}\omega_\mu = \frac{1}{\|\mu\|^2}\mathrm{d}S \ .$$

Per la formula (2.13), la fase geometrica è data dall'integrale della curvatura su una superficie che abbia l'orbita periodica come bordo. Scegliendo quella che contiene l'equilibrio si ottiene l'inverso dell'angolo solido sotteso, indicato con $-\Lambda$ (modulo 2π).

Resta da applicare la ricostruzione al sollevamento orizzontale tramite A dell'orbita ridotta. In base all'espressione di λ, si nota che il sollevamento orizzontale di $K(t)$, con dato iniziale $(\mathbb{I}_3, \mu)$ è $(\mathbb{I}_3, K(t)) \in J^{-1}(\mu) \subset SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$. Infatti λ è non nulla per $\dot{g} \neq 0$, e quindi $g(t)$ deve rimanere ferma nel dato iniziale.
La (2.10), ricordando che $\theta = \lambda|_{J^{-1}(\mu)}$, e che quest'ultima è nulla sui vettori tangenti generati da $\frac{\partial}{\partial K_i}$ con $i = 1, 2, 3$, porge

$$\xi(t) = A(X_H(\mathbb{I}_3, K(t)) = \frac{1}{\|\mu\|}\theta(g(t), K(t))\left(\dot{g}(t), \dot{K}(t)\right) = \frac{1}{\|\mu\|}K(t)\left(\mathrm{d}(L_{g(t)^{-1}})_{g(t)}\dot{g}(t)\right) \ ,$$

dove X_H è la restrizione del campo Hamiltoniano di H a $J^{-1}(\mu)$. Ricordando che la traslazione a sinistra di $\dot{g}(t)$ fornisce la velocità angolare del corpo rigido scritta nel riferimento solidale al corpo, indicata con $V(t)$, e sapendo che il tensore d'inerzia fissa l'isomorfismo tra lo spazio dei momenti angolari e delle velocità angolari, si ha

$$\xi(t) = \frac{1}{\|\mu\|}K(t)\,(V(t)) = \frac{1}{\|\mu\|}K(t)\cdot\left(\mathcal{I}^{-1}K(t)\right) = \frac{1}{\|\mu\|}K\cdot\left(\mathcal{I}^{-1}K\right)|_{(\mathbb{I}_3, K(t))} = \frac{2H_\mu}{\|\mu\|}$$

in cui H_μ è il valore costante dell'energia lungo la soluzione. L'equazione (2.7) diviene allora

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha(t)\xi(t) = \alpha(t)\frac{2H_\mu}{\|\mu\|} \quad \alpha(t) \in \mathbb{S}^1 \ ,$$

con soluzione

$$\alpha(t) = \exp\left(\frac{2H_\mu t}{\|\mu\|}\right) = \frac{2H_\mu t}{\|\mu\|} \quad (\text{modulo } 2\pi) \ .$$

La fase totale, per la (2.11) risulta quindi essere, sempre in modulo 2π,

$$\Delta = \alpha(T) + (-\Lambda) = \frac{2H_\mu T}{\|\mu\|} - \Lambda \ .$$

Questa espressione è la formula di Montgomery per la fase del corpo rigido. Si osserva come essa non dipenda dalla scelta di una delle due superfici sferiche che hanno l'orbita ridotta $K(t)$ come bordo, differendo l'angolo solido di queste di 4π, ed essendo Δ preso in modulo 2π.

Bibliografia

[1] M. Abate, F. Tovena, *Geometria Differenziale.* Spinger-Verlag, Italia, 2011.

[2] V. I. Arnol'd, *Metodi Matematici della Meccanica Classica.* Editori Riuniti, Roma, 1979.

[3] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics.* Second Edition, Addison-Wesley, 1978.

[4] F. Fassò, A. Giacobbe, *Geometry of invariant tori of certain integrable systems with simmetry and an application to a nonholonomic system.* SIGMA Symmetry Integra bility Geom. Methods Appl. 3 (2007), Paper 051, 12pp.

[5] J.E. Marsden, R. Montgomery R and T. Ratiu, *Reduction, symmetry and phases in mechanics.* Memoirs of the American Mathematical Society 88 (1990), number 436.

[6] L. Bates, R.C. Cushman, *Global Aspects of Classical Integrable Systems.* Birkhäuser, Boston, 1997.

[7] R. Montgomery, *How much does the rigid body rotate? A Berry's phase from the 18th century*, Am. J. Phys., 59 (1991), 394–398.